**Bab 2**

**Aljabar Matriks**

Dalam Bab Ini :

* Matriks
* Penjumlahan Matriks dan Perkalian Skalar Matriks
* Perkalian Matriks
* Transpos dari sebuah Matriks
* Matrik Bujur sangkar
* Pangkat Matriks; Polinomial didalam Matriks
* Matriks yang dapat Dibalik (Nonsingular)
* Jenis – jenus Khusus Matriks Bujursangkar
* Matriks Balok

Matriks

Bab ini akan membahas matriks – matriks dan operasi – operasi aljabar yang didefinisikan pada matriks – matriks ini dapat digambarkan dalam susunan persegi panjang yang terdiri dari elemen – elemen, dimana tiap entrinya bergantung pada dua subskrip (jika dibandingkan dengan vektor, dimana tiap entrinya bergantung hanya pada satu subskrip. System persamaan linear dan solusinya (bab 3)dapat dipelajari secara efisien dengan menggunakan bahasa matriks. Entri entri di dalam matriks berasal dari beberapa sebarang (tapi tetap) medan *K.* elemen elemen dari *K* disebut bilangan atau skalar. Tidak ada esensi yg hilang jika anda mengasumsikan bahwa *K* adalah medan real ***R .***

Matriks *A* pada medan *K*, atau singkatnya matriks A (jika *K* adalah implicit) adalah susunan persegi panjang yang terdiri dari skalar skalar yang biasanya dinyatakan dalam bentuk berikut :

Baris baris ini adalah matriks *A* seperti ini adalah *m* deretan horizontal yang berisi skalar skalar .

(,, . . ., ), (, ,, . . ., ), . . ., (, , . . ., )

Sebuah matriks dengan *m* dan *n* kolom disebut matriks *m* kali *n*, ditulus *mn*. pasangan bilangan *m* dan n disebut *ukuran* dari matriksnya. Dua matriks **A** dan **B** dikatakan sama, ditulis **A**=**B**, jika kedua matriks ini mempunyai ukuran yang sama dan jika elemen elemen yang bersesuaian juga sama. Sehingga kesamaan dari dua matriks *mn* akan eikuvalen dengan sebuah system dengan *mn* kesamaan, masing masing untuk tiap pasangan elemen yang bersesuaian.

Sebuah matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut *matriks baris* atau *vektor baris,* dan sebuah matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut *matriks kolom* atau *vektor kolom.* Sebuah matriks yang seluruh entrinya adalah nol disebut *matriks nol* dan biasanya dinotasikan dengan nol.

**Contoh 2.1**

1. Sususan persegi panjang *A* = adalah matriks 23. Barisnya adalah (1, -4, 5) dan (0, 3, -2), sedangkan kolomnya adalah

, ,

1. Matriks nol 2 4 adalah matriks 0 =
2. Tentukan *x*, *y*, *z* , *t* sedemikian rupa sehingga = Berdasarkan definisi kesamaan matriks, maka keempat entri yang bersesuaian haruslah sama. Dengan demikian :

*x*+*y*=3 *x*-*y*=1 2z+*t*=7 *z*-*t*=5

Dengan menyelesaikan system persamaan di atas akan diperoleh

x=2, y=1, z=4, t= -1

**Penjumlahan Matriks dan Perkalian Skalar Matriks**

Misalkan *A*=[] dan *B*=[] adalah dua matriks dengan ukuran yang sama, katakanlah matriks *mn. jumlah* dari *A* dan *B, ditulis* A+*B*, adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian dari *A* dan *B*. dalam hal ini,

*A+B* =

*Hasilkali* dari matriks *A* dengan scalar *k,* ditulis *k . A* atau di singkat *kA*, adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan tiap elemen dari *A* dengan *k*. dalam hal ini,

*kA*=

Amati bahwa *A*+*B* DAN kA adalah juga matriks *mn.*

Kita juga mendefinisikan –A = (-1)A dan A – B = A + (-B). Matriks –A disebut *negatif* dari matriks A, dan matriks A – B disebut *selisih* dari A dan B. Jumlah matriks-matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat didefinisikan.

**Contoh 2.2.** Misalkan A = dan B = Maka

A + B = =

3A = =

2A – 3B = + =

Matriks 2A - 3B disebut *kombinasi linear* dari A dan B.

Sifat-sifat dasar matriks juga berlaku pada operasi penjumlahan matriks dan operasi perkalian skalar matriks.

**Teroma 2.1**: Perhatikan sebarang matriks A, B, C (dengan ukuran yang sama) dan sebarang skalar k dan k’. Maka:

1. (A + B) + C = A + (B + C),
2. A + 0 = 0 + A = A,
3. A + (-A) = (-A) + A = 0,
4. A + B = B + A,
5. k(A + B) = kA + kB,
6. (kk’)A = k(k’A),
7. 1. A = A

Pertama-tama, perhatikan bahwa nilai 0 di dalam (ii) dan (iii) mengacu pada matriks nol. Demikian pula, berdasarkan (i) dan (iv), sebarang jumlah matriks-matriks A1 + A2 + … + An tidak memerlukan tanda kurung, dan penjumlahan tersebut tidak bergantung pada urutan matriks-matriksnya.

Amati kemiripan antara Teorema 2.1 tentang matriks dan Teorema 1.1 tentang vektor. Pada kenyataanya, operasi-operasi untuk matriks di atas dapat dipandang sebagai generalisasi dari operasi-operasi yang bersesuaian untuk vektor.

Perkalian Matriks

Sebelum kita mendefinisikan perkalian matriks, kita akan berkenalan lebih dahulu dengan *symbol* *penjumlahan* ∑ (huruf besar Yunani yang disebut sigma).

Anggaplah *f*(*k*) adalah sebuah fungsi aljabar yang menggunakan huruf

*k.*Maka fungsi mempunyai makna sebagai berikut. Pertama-tama kita menetapkan *k* = 1 dalam *f*(*k*), yang menghasilkan *f*(1). Kemudian kita menetapkan *k* = 2 di dalam *f*(*k*), yang menghasilkan *f*(2), dan menjumlahkan hasil ini dengan *f*(1), sehingga menghasilkan *f*(1) + *f*(2). Kemudian kita menetapkan *k* = 3 di dalam *f*(*k*), yang menghasilkan *f*(3), dan menambahkan hasil ini dengan hasil penjumlahan sebelumnya, sehingga menghasilkan *f* (1) *+ f*(2)+ *f*(3). Jika kita melanjutkan proses ini, maka kita akan memperoleh jumlah *f*(1) + *f*(2) + … + *f(n)*. Amati bawa dalam tiap tahap kita meningkatkan nilai k sebesar 1 sampai kita mencapai n. Huruf k disebut dengan indeks, angka 1 disebut limit bawah, dan n disebut limit atas. Huruf-huruf lainnya yang sering digunakan sebagai indeks adalah i dan j.

Kita juga dapat menggeneralisasi definisi ini pada suatu penjumlahan yang mempunyai rentang dari sebarang bilangan bulat n1 sampai sebarang bilangan bulat n2. Dalam hal ini, kita mendefinisikan

*f(n1) + f(n1 + 1) + f(n1 + 2) + … + f(n2)*

**Contoh 2.3.**

1. xk = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 dan aibi = a1b1 + a2b2 + …+ anbn
2. = 22 + 32 + 42 + 52 = 54 dan = a0 + a1x + a2x2 + … + an xn

Hasil kali dari matriks A dan matriks B, ditulis AB, relative rumit. Berdasarkan alas an tersebut, kita akan memulai pembahasan dengan sebuah kasus khusus.

Hasil kali AB dari matriks baris A = [ai] dan matriks kolom B = [bi] dengan jumlah elemen yang sama didefinisikan sebagai suatu scalar (atau matriks 1x1) yang diperoleh dengan mengalikan entri-entri yang bersesuaian dan menjumlahkannya; yaitu

*AB =*[,,…] = ++…+=

Kita menekankan bahwa *AB* adalah sebuah saklar (atau matriks 1 x 1). Hasilkali *AB* tidak dapat didefinisikan A dan B mempunyai jumlah elemen yang berbeda.

**Contoh 2.4.**

(*α*) [7,-4,5] = 7(3) + (-4)(2) + 5(-1) = 21 - 8 - 5 = 8

(*b*) [6,-1,8,3] = 24 + 9 – 16 + 15 = 32

Sekarang kita siap untuk mendefinisikan perkalian matriks secara umum. Anggapaplah A = dan B = adalah matriks-matriks yang sedemikian rupa sehingga jumlah kolom dari A sama dengan jumlah baris dari B; katakanlah A adalah matriks *m* x *p* dan B adalah matriks *p* x *n .* Maka hasilkali AB adalah matriks *m* x *n* di mana entri ij diperoleh dengan mengalikan baris ke-*I* dari A dengan kolom ke-*j* dari B. Yaitu,

Di mana = + + … + =

Hasilkali *AB* tidak dapat didefinisi jika *A* adalah matriks *m x p* dan *B* adalah matriks *q x n*, di mana *p ≠ q.*

1. Tentukan AB di mana A = dan B =

Karena *A* adalah 2 x 2 dan B adalah 2 x 3, maka hasilkali *AB* dapat didefinisikan dan *AB* adalah matrixs 2 x 3. Untuk memperoleh baris pertama dari matrixs hasilkali *AB*, kalikan baris pertama [1, 3] dari *A* secara berturut-turut dengan tiap kolom dari *B*,

Dalam hal ini,

*AB* = =

Untuk memperoleh baris kedua dari *AB*, kalikan baris kedua [2, -11] dari

*A* dengan tiap kolom dari *B*. Sehingga

*AB* = =

1. Anggaplah *A* =

*AB* = dan

*BA* =

Contoh di atas menunjukan bahwa perkalian matrixs tidak bersifat komutatif, yaitu, hasilkali *AB* dan *BA* dari matrixs-matrixs tidak selalu sama. Namun demikian, perkalian matrixs memenuhi sifat-sifat berikut ini.

**Teorema 2.2**: Misalkan *A, B,* dan *C* adalah matrixs. Maka, haslikali dan jumlah dari matrixs-matrixs tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

( i ) (AB)C = A(BC) (hukum asosiatif),

( ii ) A(B+C) = AB + AC (hukum distributif kiri),

(iii ) (B + C)A= BA + CA (hukum distributif kanan),

( iv ) k(AB) = (kA)B = A(Kb), di mana k adalah skalar.

Kita perhatikan bahwa 0A = 0 dan B0 = 0, di mana 0 adalah matriks nol.

**Transpos dari sebuah Matriks**

*Transpos*  dari sebuah matriks A, ditulis , adalah matriks yang diperoleh dengan cara menuliskan kolom-kolom dari A sebagai baris-baris dari A, secara berurutan. Sebagai contoh,

= dan =

Dengan kata lain, jika A = adalah matriks m x n, maka = adalah matriks n x m di mana =

Amati bahwa transpose dari sebuah vektor baris adalah sebuah vektor kolom. Demikianlah pula, transpose dari sebuah vektor kolos adalah sebuah vektor baris. Teorema berikut ini mencantukmkan sifat-sifat dasar dari operasi transpos.

**Teorema 2.3**: Misalkan A dan B adalah matriks dan k adalah scalar. Maka transpose dari jumlah dan hasilkali matriks-matriks tersebut dapat didefinisi-

Kan sebagai berikut :

( i ) (A + B )T = + ( iii ) (kA)T = ,

( ii ) = A, ( iv ) (AB)T =

Kita dapat menekankan bahwa, berdasarkan (iv), transpose dari sebuah hasilkali adalah hasilkali dari transpose-transposnya, tetapi dalam urutan yang terbalik.

**Matriks Bujursangkar**

*Matriks bujursangkar*  adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama. Matriks bujursangkar n x n dikatakan berorde n dan kadang-kadang disebut matriks bujursangkar-n.

Ingat kembali bahwa tidak selamanya dua matriks dapat dijumlahkan atau dikalikan, kecuali jika yang kita maksud hanyalah matriks-matriks bujur sangkar berorde n, maka persoalannya menjadi lain. Secara spesifik, operasi-operasi penjumlahan, perkalian, perkalian scalar, dan transpose dapat dilakukan pada sebarang matriks n x n , dan hasilnya juga berupa matriks n x n.

**Contoh 2.6.**  Berikut ini adalah matriks-matriks bujursangkar berorde 3:

A = dan B =

Berikut ini juga merupakan matriks-matriks berorde 3:

A + B = 2A = =

AB = BA =

**Diagonal dan Trace**

Misalkan adalah matriks bujursangkar-n. *Diagonal*  atau  *diagonal utama* dari A terdiri dari elemen-elemen dengan subskrip yang sama yaitu

*Trace*  dari A, ditulis tr(A), adalah jumlah dari elemen-elemen diagonalnya, yaitu, tr(A) =

Teorema berikut ini diterapkan

**Teorema 2.4**: anggaplah A = [] dan B = [] adalah matriks bujursangkar n dan k adalah saklar. Maka:

1. tr(A + B) = tr(A) + tr(B)
2. tr(kA) = k tr(A)
3. tr() = tr(A)
4. tr(AB) = tr(BA)

**Contoh 2.7.** Misalkan A dan B adalah matriks A dan B pada contoh 2.6. Maka

diagonal dari A = [1,-4,7] dan tr(A) = 1 – 4 + 7 = 4

diagonal dari B = [2,3,-4] dan tr(B) = 2 + 3 – 4 = 1

selanjutnya,

tr(A + B) = 3 – 1 + 3 = 5

tr() = 1 – 4 + 7 = 4

tr(AB) = 5 + 0 – 35 = -30

tr(2A) = 2 – 8 + 14 = 8

tr(BA) = 27 – 24 – 33 = -30

Seperti yang diperkirakan dari teorema 2.4,

tr(A + B) = tr(A) + tr(B), tr() = tr(A), tr(2A) = 2tr(A)

Lebih lanjut lagi, meskipun AB ≠ BA, trace-nya sama.

**MATRIKS IDENTITAS, MATRIKS SKALAR**

Matriks identitas bujursangkar-n atau matriks satuan, dinotasikan dengan , atau singkatnya I, adalah matriks bujursangkar-n dengan entri 1 pada diagonalnya dan entri 0 pada bagian lainnya. Matriks indentitas I mirip dengan saklar 1 sehingga di dalam sebarang matriks bujursangkar-n A, AI, = IA = A. Dalam uraian yang lebih umum, jika B adalah matriks m x n, maka

= B = B

Untuk sebarang saklar k, matriks kI yang mengandung k pada diagonalnya dan 0 di bagian lainnya disebut matriks saklar yang terkait dengan saklar k. Amati bahwa (kl) A = k(IA) = KA. Yang berarti, mengalikan matriks A dengan matriks saklarb kI adalah ekuivalen dengan mengalikan A dengan saklar k.

**Contoh 2.8.** berikut ini adalah matriks-matriks identitas berorde 3 dan berorde 4, dan matriks-matriks saklar yang terkait untuk k = 5:

, , ,

CATAT

Dalam prakteknya, kita dapat mengabaikan blok atau pola dari bilangan 0 jika memang tidak bermakna ganda, seperti pada matriks-matriks kedua dan keempat diatas

Fungsi *delta Kronecker* didefinisikan sebagai

=

Sehingga, matriks identitasnya dapat didefinisikan sebagai *I* = [].

**Pangkat Matriks; Polinominal di dalam Matriks**

Misalkan *A* adalah matriks bujursangkar-*n* pada medan *K*. Pangkat dari *A* didefinisikan sebagai berikut:

= *AA, =A, …, =A, …,* dan =*I.*

Polinimial di dalam matriks *A* juga dapat didefinisikan. Secara spesifik, untuk sebarang polynomial *f(x) = + x + + …. +* dimana adalah scalar didalam K, *f(A)*didefinisikan menjadi matriks berikut ini:

*f(A) = I + A + + … +*

Jika *f(A)* adalah matriks nol, maka *A* disebut *nol* atau *akar* dari f*(x).*

**Contoh 2.9.**Anggaplah A = . Maka

= =

dan

= = =

Anggaplah = – 3x + 5 dan g(x) = + 3x – 10. Maka

*g*(*A*) =

Sehingga *A* adalah matriks nol dari polinomial *g*(*x*).

**Matriks yang Dapat Dibalik (Nonsingular).**

Matriks bujur sangkar *A* dikatakan *dapat dibalik atau nonsingular* jika terdapat matriks *B* sedemikian rupa sehingga *AB = BA =* *I* dimana *I* adalah matriks identitasnya. Matriks *B* seperti ini bersifat unik, yaitu jika dan , maka .

Kita menyebut matriks *B* seperti ini sebagai *invers* atau *kebalikan* dari *A* dan dinotasikan dengan amati bahwa hubungan di atas bersifat simetrik; yaitu, jika *B* adalah invers dari *A,* maka *A* adalah dari *B.*

**Contoh 2.10.** Anggaplah bahwa dan . Maka dan

Sehingga dan adalah invers.

Kita telah mengetahui bahwa jika dan hanya jika Sehingga kita hanya perlu menguji salah satu hasil kali untuk menentukan apakah kedua matriks yang diketahui merupakan invers atau tidak.

Sekarang, anggaplah dan dapat dibalik. Maka dapat dibalik dan Dalam uraian yang lebih umum, jika dapat dibalik, maka hasil kalinya juga dapat dibalik, dan , yaitu hasil kali dari invers-inversnya dalam urutan yang terbalik.

**Invers dari Matriks 2 x 2**

Misalkan adalah sebarang matriks 2 x 2, katakanlah Kita bermaksud menurunkan sebuah rumus untuk , yaitu invers dari Secara spesifik, kita mencari skalar, katakanlah sedemikian rupa sehingga

atau

Dengan menetapkan empat entri yang sama dengan entri-entri yang bersesuaian di dalam matriks identitasnya, maka akan dihasilkan empat persamaan yang dapat dibagi menjadi dua system 2 x 2 berikut ini:

Anggaplah kita misalkan (disebut *determinan* dari ). Dengan asumsi bahwa kita dapat menyelesaikan variabel-variabel tidak diketahui di atas secara unik dan memperoleh

dan selanjutnya akan menghasilkan

Dengan kata lain, ketika invers dari matriks *A,* 2 x 2 dapat diperoleh dari *A* dengan cara berikut:

1. Pertukarkan kedua elemen pada bagian diagonalnya.
2. HIlangkan nilai negative dari dua elemen lainnya.
3. Kalikan matriks yang dihasilkan dengan atau, secara ekuivalen, bagilah tiap elemen dengan

## INGAT

Sifat di atas- di mana sebuah matriks dapat dibalik jika dan hanya jika matriks A mempunyai sebuah determinan taknol – adalah benar untuk matriks bujursangkar berorde berapapun

Dalam kasus matriks *A* tidak dapat dibalik.

**Contoh 2.11.**  Tentukan invers dari dan

Pertama-tama, hitunglah Karena maka matriks *A* dapat dibalik dan

Kemudian, hitunglah lBl = (6) – 3(2) = 0., Karena lBl = 0,maka matriks B tidak mempunyai invers.

Anggaplah A adalah sebarang matriks bujursangkar –n. Penentuan inversnya yaitu dapat disederhanakan, sebagaimana di atas, menjai penentuan solusi dari sekumpulan system persamaan linear n X n. Solusi daris system seperti ini, dan sebuah cara yang efisien untuk menyelesaikan sekumpulan system seperti ini, akan dibahas lebi lanjut pada Bab 3

## Jenis-jenis Khusus Matriks Bujursangkar

Subbab ini akan menguraikan beberapa jenis khusus matriks bujursangkar.

**Matriks Diagonal**

Matriks bujursangkar D = [] disebut matriks diagonal jika seluruh entri tak diagonal adalah nol, Matriks seperti ini kadang-kadang dinotasikan dengan D= diag (,, … , )

Dimana beberapa atau seluruh mungkin bernilai nol.sebagai contoh,

Adalah matriks-matriks diagonal, yang masig-masing dapat dorepresentasikan dengan diag (4,-5) dan diag(3,-7,0). (Pola bilangan 0 pada matriks kedua telah diabaikan)

**Matriks Segitiga**

Matriks bujursangkar disebut matriks segitiga atas, atau singkatnya matriks segitiga, jika seluruh entri di bawah diagonal (utama)-nya sama dengan 0,yaitu jika = 0 unuk seluruh i > j. Matriks-matriks segititga atas umumnya berorde 2 dan 3,sebagaimana berikut:

(seperti padamatriks diagonal. Biasanya kita mengabaikan pola bilangan 0.)

**Teorema 2.5 : Anggaplah A =** ] dan B = [] adalah dua matriks segitiga(atas) n X n, Maka :

1. **A+B, kA ,AB** adalah matriks segitiga dengan masing-masing diagonalnya ( + , …., + ),(, ….. ,),( ,…., ),
2. **Untuk sebarang polinominal** adalah segitiga dengandiagonal**(** ,,…. ,)
3. A dapat dibalik jikadan hanya jika tiap elemen diagonal ≠ 0;b danketika terdapat matriks ini juga termasuk matriks segitiga.

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar di mana entri-entri yang berada dia atas diagonal seluruhnya nol. Kita perlu mengingat bahwa teorama 2.5 berlaku jika kita mengganti istilah “segitiga” dengan ‘segitigabawah”atau “diagonal”.

**Matriks simetrik**

Matriks A disebut matriks simetrikjika =A. Secara ekuivalen, A = [] disebut simetrik jikaelemen-elemen simetrik (elemen-elemen cerminterhadap diagonalnya)-nya sama, yaitu jika tiap = .

Matriks A disebut simetrik miring jika =-A atau, secaraekuivalen,jika tiap = .Jelaslah bahwa elemen-elemen diagonal dari matriks seperti ini pasti nol, karena = mengimplikasikan = 0.

(Perhatikan bahwa matriks A haruslah bujursangkar jika =A atau =-A.)

**Contoh 2.12.** Misalkan A = , B =

Dengan melakukan inspeksi, Anda akan menjumpai bahwa elemen-elemen simetrik di dalam A adalah sama, atau =A. Sehingga A adalah simetrik.

Elemen-elemen diagonal dari B adalah 0 dan elemen-elemen simetriknya adalah negatif satu sama lain, atau = -B. Sehingga B adalah simetrik miring.

**Matriks Ortogonal**

Matriks real a disebut *ortogonal* jika = , yaitu jika = = *I*.

Sehingga, A pasti berupa matriks bujursangkar dan dapat dibalik.

**Contoh 2.13.** Misalnya A =

= =

Dengan mengenali dengan akan dihasilkan , yaitu = . Ini juga berarti = . Sehingga = ; dalam hal ini, adalah orthogonal.

Sekarang, anggaplah adalah matriks ortogonal real dengan baris-baris.

.

Karena adalah orthogonal, kita seharusnya memperoleh , yaitu

Dengan mengalikan dengan den dengan menetapkan tiap entri yang sama dengan entri-entri yang bersesuaian di dalam , maka akan dihasilkan Sembilan persamaan berikut:

, ,

,

, ,

Demikian pula, , dan untuk . Sehingga, baris-baris adalah vektor-vektor satuan dan saling orthogonal satu sama lain.

Secara umum, vektor-vektor di dalam dikatakan membentuk *himpunan* *ortogomal* yang terdiri dari vektor-vektor jika vektor-vektor tersebut merupakan vektor satuan dan saling orthogonal satu sama lain; yaitu,

Dengan kata lain, di mana adalah fungsi delta Kronecker.

Kita telah melihat bahwa syarat mengimplikasikan bahwa baris baris dari juga membentuk himpunan ortonomal yang terdiri dari vektor-vektor tersebut. Demikian pula, syarat mengimplimasikan bahwa kolom-kolom dari juga membentuk himpunan ortonomal yang terdiri dari vektor-vektor. Lebih jauh lagi, karena tiap tahap dapat dibalik, maka kebalikannya juga berlaku.

Hasil-hasil di atas untuk matriks secara umum adalah bena. Dalam hal ini, berlaku teorema berikut.

**Teorema 2.6**: Misalkan adalah matriks real. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

1. adalah orthogonal.
2. Baris-baris dari membentuk himpunan ortogomal.
3. Kolom-kolom dari membentuk himpunan ortonormal.

**Vektor Normal**

Matriks real adalah matriks *normal* jika matriks tersebut *komut (commute)* atau bias saling bertukar tempat dengan tranposnya , yaitu, jika .

Jika A simatrik, orthogonal, atau simatrik miring, maka adalah matriks normal. Terdapat pula beberapa matriks normal lainnya.

**Contoh 2.14.** Misalkan . Maka

dan

***A*=**Karena ***A*** =  ***A*,** maka matriks ***A*** adalah matriks normal.  
  
**MatriksBlok**Dengan menggunakan sebuah sistem yang terdiri dari garis horizontal dan garis vertical (garis putus-putus), kita dapat mempartisi matriks ***A*** menjadi submatriks-submatriks yang disebut *blok* (atau *sel*) dari ***A***. Lebih jelasnya, suatu matriks tertentu dapat dibagi menjadi blok-blok dengan cara-cara yang berbeda. Sebagai contoh,   
   
   
Kelebihan dari mempartisi matriks-matriks, katakanlah matriks ***A*** dan ***B***, menjadi beberapa blok adalah bahwa hasil dari operasi terhadap ***A*** dan ***B*** dapat diperoleh dengan melakukan perhitungan dalam blok, seolah-olah blok-blok itu adalah elemen-elemen matriks. Hal ini akan diilustrasikan dibawah ini, dimana notasi ***A* = [ ]** akan digunakan untuk matriks blok ***A*** dengan blok-blok **.**

Anggaplah ***A* = [ ]** dan ***B*** = **[ ]** adalah matriks-matriks blok dengan jumlah blok baris dan blok kolom yang sama, dan anggaplah blok-blok yang bersesuaian mempunyai ukuran yang sama. Maka, penjumlahan blok-blok yang bersesuaian dari ***A*** dan ***B*** juga menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian dari ***A*** dan ***B***, dan perkalian tiap blok dari ***A*** dengan skalar *k* akan mengalikan tiap elemen dari ***A*** dengan *k*. Sehingga

***A*** + ***B*** =

dan

*k* ***A*** =

Untuk kasus perkalian matriks hasilnya kurang jelas, meskipun masih tetap benar. Dalam hal ini, anggaplah ***U*** = [] dan ***V*** = [] adalah matriks-matriks blok sedemikian rupa sehingga jumlah kolom ditiap blok sama dengan jumlah baris ditiap blok . (Sehingga tiap hasil kali dapat didefinisikan.) Maka

***UV*** =

Dimana = ++…+

**Matriks Blok Bujursangkar**

Misalkan ***M*** adalah sebuah matriks blok. Maka ***M*** disebut *matriks blok bujursangkar* jika:

1. ***M*** adalah sebuah matriks bujursangkar.
2. Blok-bloknya membentuk matriks bujursangkar.
3. Blok-blok diagonalnya juga merupakan matriks-matriks bujursangkar.

Dua syarat yang terakhir akan terjadi jika dan hanya jika jumlah garis horizontal dan garis vertikalnya sama dan garis-garis tersebut ditempatkan secara simetris.

Perhatikan dua matriks blok berikut ini:

A= dan B =

Matriks blok A bukan merupakan matriks bujursangkar, karena blok diagonal kedua dan blok diagonal ketiga tidak bujursangkar. Di lain pihak, matriks blok B adalah matriks blok bujursangkar.

MATRIKS DIAGONAL BLOK

Misalkan *M* = [Aij] adalah matiks blok bujursangkar sedimikian rupa sehingga seluruh blok takdiagonalnya merupakan matriks-matriks nol, yaitu , Aij = 0 ketika *i* ≠ *j*. Maka M disebut matriks diagonal blok. Kita kadang-kadang menotasikan matriks diagonal blok seperti ini dengan menuliskannya sebagai

*M* = diag(A11,A22, …,Arr) atau *M* = A11  A22  … Arr

Kegunaan dari matriks diagonal blokadalah bentuk aljabar matriks blok seringkali disederhanakan menjadi bentuk aljabar blok individu, secara spesifik, anggaplah f(x) adalah polinomial dan M adalah matriks diagonal blok atas. Maka f(M) adalah matriks diagonal blok dan

F(M) = diag(f(A11),f(A22), …,f(Arr))

Demikian pula, M dapat dibalik jika dan hanya jika tiap Aii dapat dibalik, dan dalam kasus sepert ini, M-1 adalah matriks diagonal blok dan

M-1 =diag(,, …,)

**Contoh 2.15.** Tentukan yang mana dari matriks blok bujursangkar berikut ini yang merupakan matriks segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal.

A= , B=

C= , D=

1. A adalah matriks segitiga atas karena blok dibawah diagonalnya adalah sebuah blok nol.
2. B adalah matriks segitiga bawah karena seluruh blok di atas diagonalnya adalah blok-blok nol.
3. C adalah matriks diagonalnya karena blok diatas dan blok di bawah diagonalnya adalah blok-blok nol.
4. D bukan matriks segitiga atas maupun segitiga bawah. Demikian pula, tidak ada pembagian partisi dari D yang dapat membaginya menjadi matriks segitiga atas blok ataupun matriks segitiga bawah balok.